Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2015/2
Lista 0
27/10/2015
Limite de Tempo: 80 Minutos

Tabela de Pontos (favor não preencher)

Questão	1	2	3	4	5	Total
Pontos	25	25	25	25	0	100
Pontos Extra	0	0	0	0	20	20
Resultado						

Questão 1 (25 pontos)

Para a EDO descrita por $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0$ com $a,b,c\in\Re$, $a\neq 0$ e $b^2-4ac=0$, mostre que $y(t)=e^{-\frac{b}{2a}t}$ é solução.

Solução: Para $y(t)=e^{-\frac{b}{2a}}$, temos que $y'(t)=-\frac{b}{2a}\cdot e^{-\frac{b}{2a}t}$(5 pts) e $y''(t)=\frac{b^2}{4a^2}\cdot e^{-\frac{b}{2a}t}$(5 pts). Substituído $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ na EDO, temos:

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=a\frac{b^2}{4a^2}\cdot e^{-\frac{b}{2a}t}-b\frac{b}{2a}\cdot e^{-\frac{b}{2a}t}+ce^{-\frac{b}{2a}t}(5pts)$$

Assim sendo, podemos reescrever a equação acima como sendo:

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)e^{-\frac{b}{2a}}=\frac{-b^2-4ac}{4a}e^{-\frac{b}{2a}}(5pts)$$

Como (por hipótese) $b^2-4ac=0$, então $y(t)=e^{-\frac{b}{2a}}$ é solução.(5 pts)

Questão 2 (25 pontos)

Encontre a solução da EDO abaixo

$$\frac{\partial y}{\partial x}-2xy=x$$

Solução: Reescrevendo a EDO, temos:

$$\frac{\partial y}{1+2y} = x\partial x$$

Fazendo a substituição: $u = 1+2y$ e $\partial u = 2\partial y$ (5 pts), temos

$$\int \frac{\partial u}{u} = \int x\partial x \rightarrow \texttt{ln}|u| + C_1 = 2\left(\frac{x^2}{2} + C_2\right) \rightarrow \texttt{ln}u = x^2 + C_3 \rightarrow u = C_4 e^{x^2} (5pts)$$

Substituindo $u = 1+2y$, temos:

$$2y + 1 = C_4 e^{x^2} \rightarrow y = C_5 e^{x^2} - 1/2 (10pts)$$

Onde (5 pts) - todos os itens :

- C_1 e C_2 são constantes de Integração
- $C_3 = C_2 - C_1$
- $C_4 = e^{C_3}$
- $C_5 = C_4/2$

Questão 3 (25 pontos)

Utilizando o **VI** (Valor Inicial) $y(1/3) = e/3$, encontre a solução da EDO abaixo

$$\frac{\partial y}{\partial t} = e^{3t}$$

Solução: Como $\frac{\partial y}{\partial t} = e^{3t}$, temos

$$y(t) = \int e^{3t} dt = \frac{e^{3t}}{3} + C (5pts)$$

A equação acima é válida para $-\infty < t < +\infty$ (5 pts). Substituindo $t = 1/3$ e $y(1/3) = e^3/3$ temos que $C = 0$(10 pts), ou seja, a solução da EDO se define como sendo:

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3}, -\infty < t < +\infty (5pts)$$

Questão 4 (25 pontos)

Dada a EDO abaixo, encontre a sua solução pelo **método do fator integrante**.

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + \frac{2}{t}y(t) = t$$

Solução: A EDO se encontra no formato padrão $\frac{\partial y(t)}{\partial t} + p(t)y(t) = q(t)$. Sendo assim, o fator integrante da EDO é possuirá o formato: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$(5 pts), substituido valores temos:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2\int \mathtt{ln}|t|dt} = e^{\int \mathtt{ln}t^2 dt} = t^2$$

Multiplicando a EDO por $\mu(t)$, temos:

$$t^2\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 2ty(t) = t^2(5pts)$$

Vemos que o lado direito é igual a derivada de $t^2y(t)$, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2y(t)\right) = t^3(10pts)$$

Integrando-se a equação acima temos:

$$t^2y(t) = \frac{t^4}{4} + C$$

Explicitando $y(t)$ temos a solução da EDO

$$y(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{C}{t^2}(5pts)$$

Questão Bonus 5 (20 pontos)

Encontre a solução da EDO abaixo

$$\left(y^2+1\right)x\partial x + (x+1)\,y\partial y = 0$$

Solução: Reescrevendo a EDO, temos:

$$\frac{y\partial y}{(y^2+1)} = -\frac{x\partial x}{(x+1)} \to \int \frac{y\partial y}{(y^2+1)} = -\int \frac{x\partial x}{(x+1)}(5pts)$$

Fazendo-se a substituição $u = y^2 + 1$(5 pts), temos:

$$\frac{1}{2}\mathtt{ln}u + C_1 = -1(x - \mathtt{ln}(1+|x|) + C_2) \to u = e^{-2x}\cdot e^{\mathtt{ln}(1+|x|)^2}\cdot e^{C_3}$$

Desfazendo-se a substituição

$$y^2 + 1 = C_4(1+x)^2 e^{-2x} \rightarrow y = \pm\sqrt{C_4(1+x)^2 e^{-2x} - 1}(5pts)$$

Onde (5 pts) - todos os itens :

- C_1 e C_2 são constantes de Integração
- $C_3 = -2(C_1 + C_2)$
- $C_4 = e^{C_3}$