Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2015/2
Lista 1
Data de Expedição: 06/11/2015
Limite de Tempo: 1 Semana - Data de Entrega: 13/11/2015

Tabela de Pontos (favor não preencher)

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	10	10	15	15	15	15	10	10	100
Pontos Extra	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Resultado									

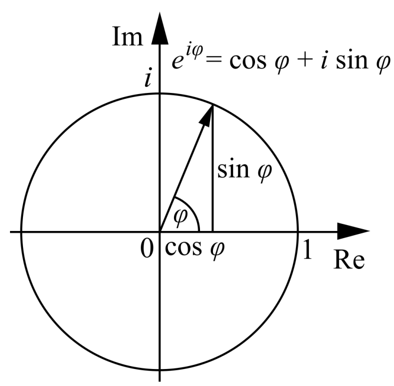
1 Conhecimentos Básicos

Questão 1 (10 pontos)

Prove, através da fórmula de Euler:

(a) $a = |a|e^{j\phi_a} = |a|cos(\phi_a) + j|a|sin(\phi_a)$

Solução: Na figura abaixo temos a definição da fórmula de Euler.



Como pode ser visto na definição, temos a resposta.

(b) $a = |a|e^{-j\phi_a} = |a|cos(\phi_a) - j|a|sin(\phi_a)$

Solução: Por Euler e sabendo que $cos(t)$ é par e $sen(t)$ é impar, temos:

$$a = |a|e^{-j\phi_a} = |a|cos(-j\phi_a) + j|a|sen(-j\phi_a) = |a|cos(j\phi_a) - j|a|sen(j\phi_a)$$

(c) $cos(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)$

Solução: Com as soluções das questões a e b, temos:

$$e^{j\phi} = cos(\phi) + jsin(\phi) \tag{1}$$

$$e^{-j\phi} = cos(\phi) - jsin(\phi) \tag{2}$$

Então, somando as equações **??** e **??**.
Temos:

$$cos(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)$$

(d) $sen(\phi) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right)$

Solução: Com as soluções das questões a e b e somando a equação **??** com -1*equação **??**, temos:

$$sin(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\phi} - e^{-j\phi}\right)$$

(e) $cos^2\phi = \frac{1}{2}\left(1 + cos(2\phi)\right)$

Solução: Fazendo $cos(\phi) * cos(\phi)$ (através da equação **??**), temos:

$$cos^2(\phi) = \frac{1}{4}*\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right)*\left(e^{j\phi} + e^{-j\phi}\right) = \frac{1}{4}*\left(2 + e^{-j2\phi} + e^{j2\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + cos(2\phi)\right)$$

Questão 2 (10 pontos)
Esboce o módulo e a fase dos seguintes números complexos para $-\pi \leq t \leq \pi$ gerando os gráficos em computador e avaliando os resultados:

(a) $cos(t) + sin(2t)$

(b) $cos(t + 30^o) + sin(t + 60^o)$

(c) $sen(t/10) + sen(3t)$

2 Classificação de Sinais

Questão 3 (15 pontos)
Classifique os sinais expostos nas figuras 1, 2, 3, 4 e 5 em: analógicos, digitais, contínuos no tempo contínuo, discretos no tempo, periódicos, não-periódicos, determinísticos ou probabilísticos

Solução:

(a) O sinal descrito pela figura é uma onda quadrada, ou seja, pode ser classificado como: digital, tempo contínuo, periódico e determinístico.

(b) A função descrita pela figura é uma onda dente-de-serra, ou seja, pode ser classificada como: analógico, tempo contínuo, periódico e determinístico.

(c) A função descrita pela figura é um seno discreto, ou seja, pode ser classificada como: analógico, tempo discreto, periódico, determinístico.

(d) A função descrita pela figura não pode ser estimada através de um modelo matemático aparente, ou seja, pode ser classificada como: analógico (partindo da hipótese que o sinal pode assumir qualquer valor na sua faixa dinâmica), tempo discreto, não-periódico e não temos um modelo matemático que descreva essa função aparentemente.

(e) A função descrita pela figura é um seno ao qual foi adicionado um ruído, ou seja, pode ser classificado como: analógico, tempo contínuo, periódico (uma vez que o temos, aparentemente, um modelo matemático que descreve minimamente o sinal) e sinal aleatório.

3 Classificação de Sistemas

Questão 4 (15 pontos)

Classifique os sistemas abaixo em: linear e não-linear. Utilizando como entrada $f(t)$ e como saída $y(t)$.

(a) $\frac{\partial y(t)}{\partial t} + sen(t) \cdot y(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t} + 2f(t)$

Solução: Para mostrar a linearidade devemos mostrar as duas propriedades separadamente.
Supondo $x(t)$ a entrada do sistema e $y(t)$ a saída, ou seja:

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

Então a propriedade da aditividade pode ser provada como:

$$x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

E a propriedade da comutatividade pode ser provada como:

$$K \cdot x_1(t) \rightarrow K \cdot y_1(t)$$

Então aplicando-se esse conceito acima a equação abaixo, podemos verificar a definição de linearidade para o sistema proposto

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + sen(t) \cdot y(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t} + 2f(t)$$

Aplicando-se $f_1(t)$, obtemos $y_1(t)$:

$$\frac{\partial y_1(t)}{\partial t} + sen(t) \cdot y_1(t) = \frac{\partial f_1(t)}{\partial t} + 2f_1(t)$$

Por inspeção podemos verificar que quando fazemos $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ não obtemos $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, ou seja, **o sistema é não-linear**

(b) $\frac{\partial y(t)}{\partial t} + y^2(t) = f(t)$

Solução: Por inspeção podemos verificar que quando fazemos $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ não obtemos $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, ou seja, **o sistema é não linear**

(c) $\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 3ty(t) = t^2 f(t)$

Solução: Por inspeção podemos verificar que quando fazemos $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ obtemos $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, ou seja, **o sistema é linear**

Questão 5 (15 pontos)

Classifique os sistemas abaixo em: variante no tempo ou invariante no tempo, utilizando $f(t)$ como entrada e $y(t)$ como saída.

(a) $y(t) = \int_{-5}^{5} f(\tau)\partial\tau$

Solução: O sistema é variante no tempo. A saída é constante no tempo e tem o valor dado pela área sob a curva do sinal $f(t)$ no intevalo $-5 \leq t \leq 5$. Se por acaso, o sinal $f(t)$ for atrasado de T, a saída atrasada se tornará uma constante (pois a área sob a curva mudará). Como os valores das constantes podem ser diferentes, o sistema é invariante no tempo.

(b) $y(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$

Solução: O sistema é invariante no tempo. A saída depende somente da derivada da entrada, ou seja, não depende do tempo e a derivada varia linearmente com o tempo.

4 Energia e Potência de Sinais

Questão 6 (15 pontos)
Calcule a potência e a energia dos sinais das figuras 6 e 7.

Solução:
item a - figura 6. A energia do sinal pode ser definido como a área sob a curva do sinal elevado ao quadrado.

$$E_{sinal}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} sinal^2(t)\partial t$$

Os limites de integração são definidos pelo sinal analisado. Como o Sinal da figura 6 está definido nos intervalos $-4 \leq t \leq -2$ e $2 \leq t \leq 4$, podemos somar as áreas dos dois intervalos separadamente. Ou seja, $area = 2u.e. + 2u.e. = 4u.e.$.

A potência é a energia dissispada em um intervalo de tempo, ou seja:

$$P_{sinal}(t) = lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} sinal^2(t)\partial t$$

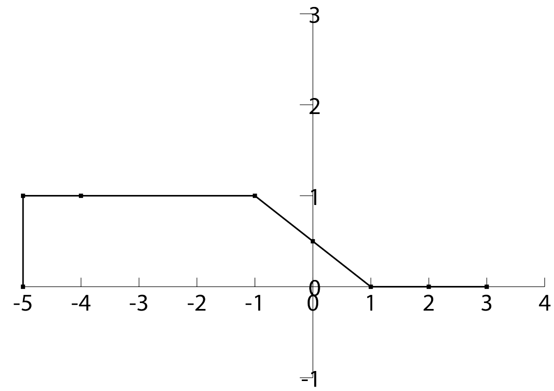
O valor de potência é $1u.p.$

5 Operações com Sinais

Questão 7 (10 pontos)
Dado o sinal $x(t)$ (figura 7), realize as seguintes operações e esboce o resultado

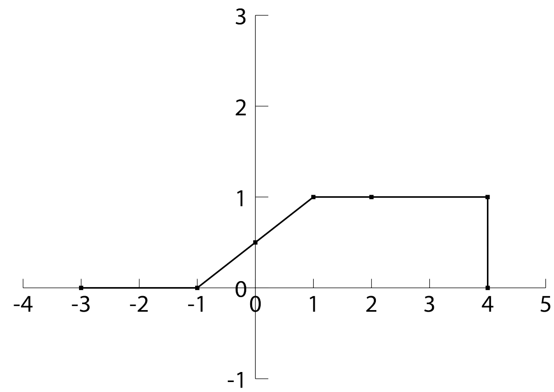
(a) $x(t-1)$

Solução: O sinal foi submetido a um atraso no tempo de 1.



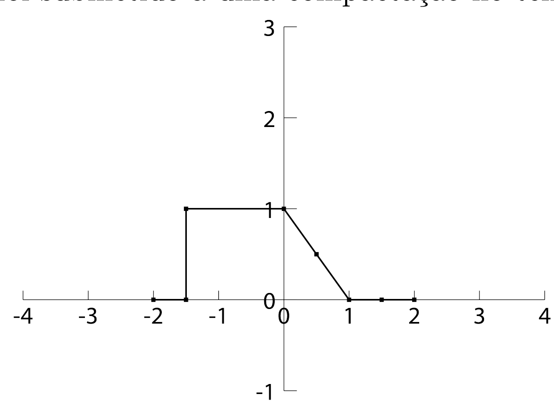
(b) $x(1-t)$

Solução: O sinal foi submetido a uma inversão no tempo e um adiantamento de 1



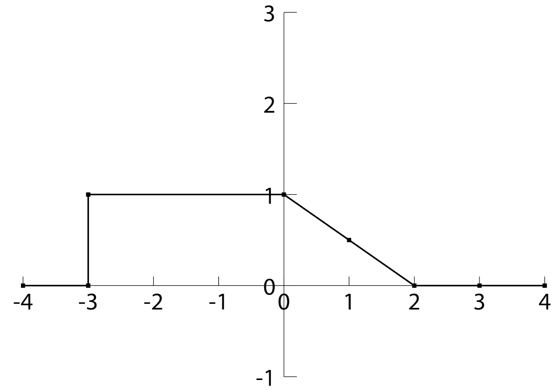
(c) $x(2t)$

Solução: O sinal foi submetido a uma compactação no tempo



(d) $x^2(t)$

Solução: O sinal foi submetido a uma potenciação do sinal (que não altera o sinal, uma vez que não temos valores negativos em sua imagem)



Questão 8 (10 pontos)

Decomponha os sinais abaixo na sua parte real e imaginária, esboçando os gráficos.

(a) $y(t) = e^{j\theta t}cos(\theta t)$, com $\theta \leq 0$

(b) $y(t) = e^{j\theta t}tan(\theta t)$, com $\theta > 0$

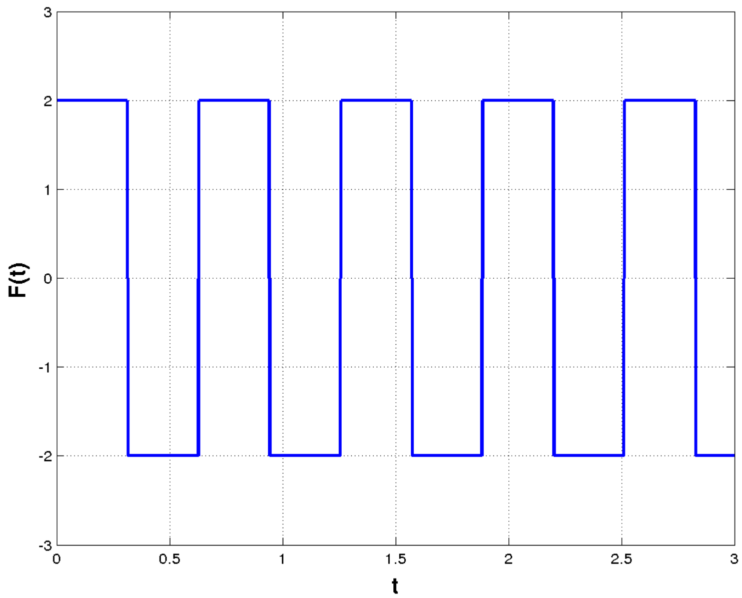


Figura 1: Questão 3 - item a

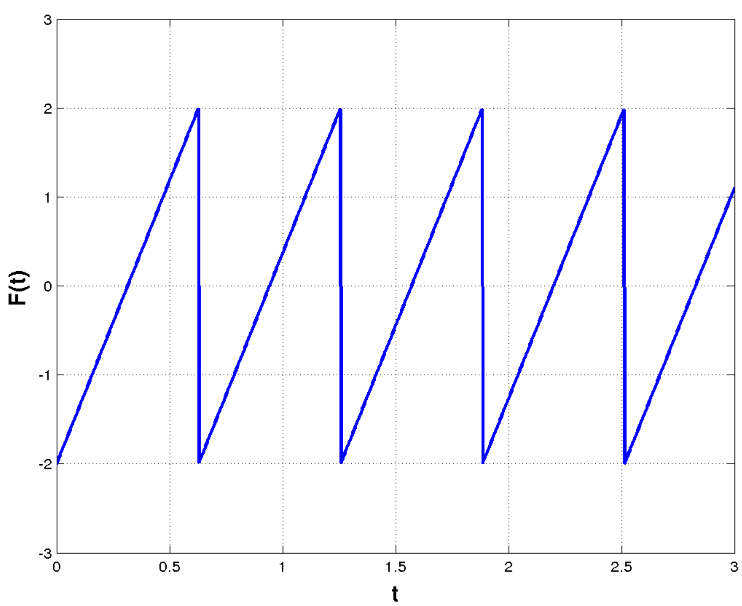


Figura 2: Questão 3 - item b

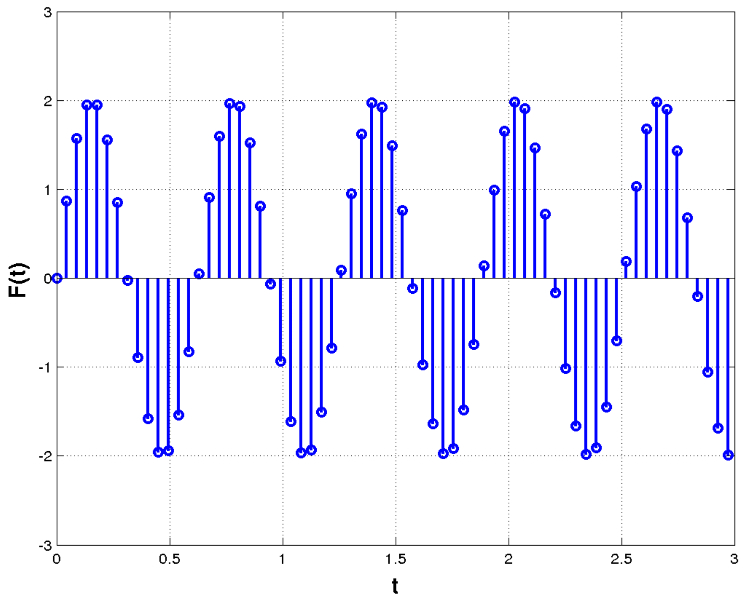


Figura 3: Questão 3 - item c

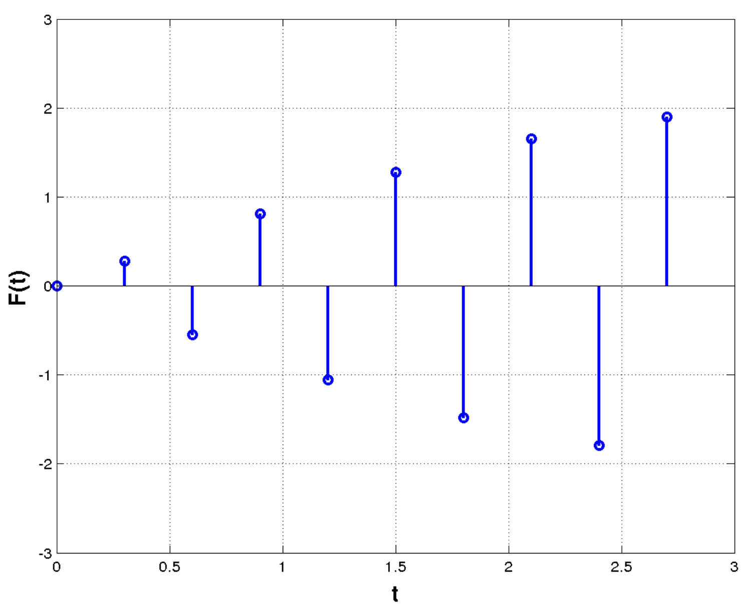


Figura 4: Questão 3 - item d

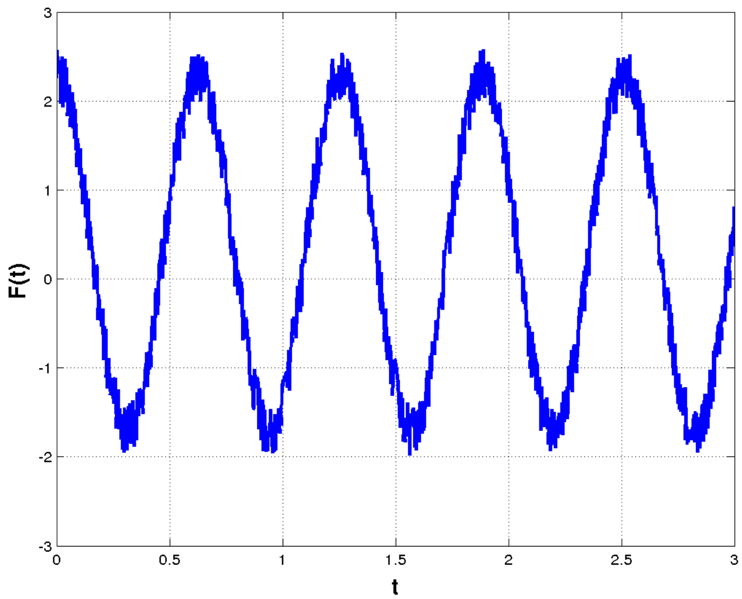


Figura 5: Questão 3 - item e

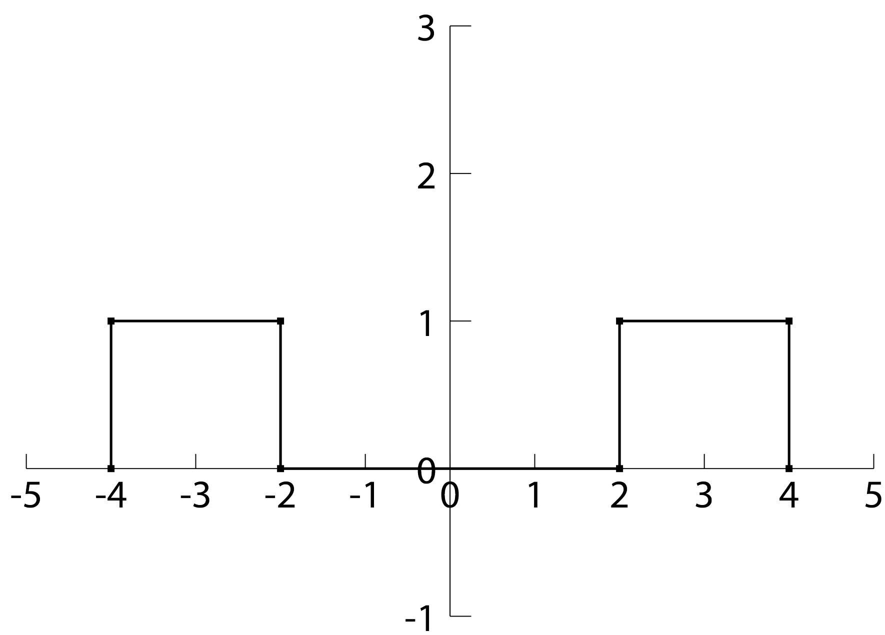


Figura 6: Questão 6 - item a

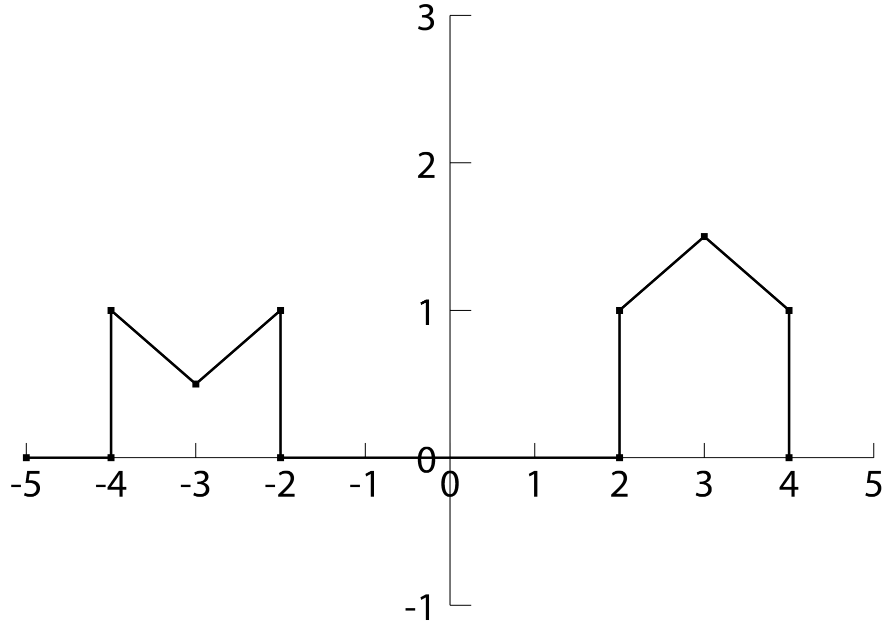


Figura 7: Questão 6 - item b

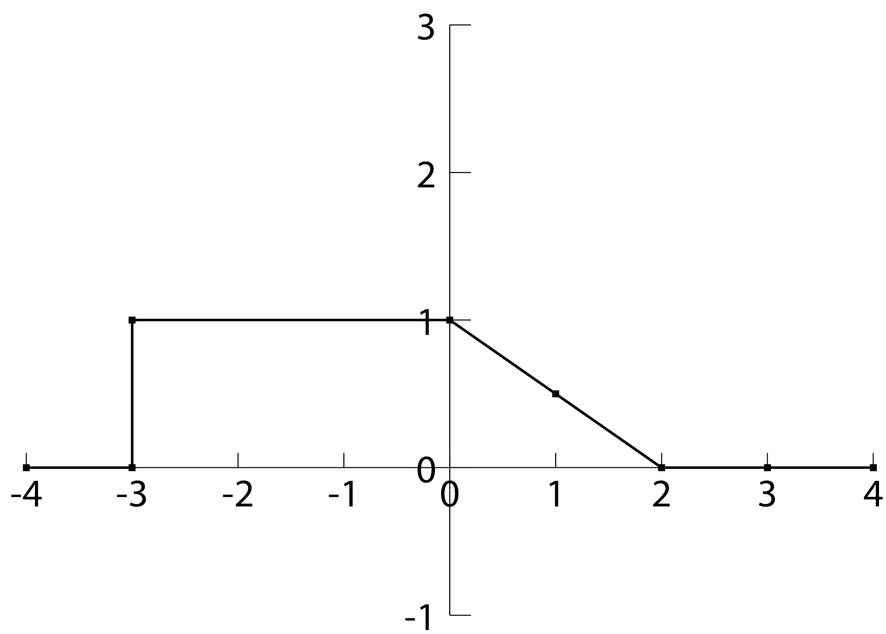


Figura 8: Sinal da Questão 7