Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
Lista 3
Data de Entrega: 05/06/2015 Horário Limite: 15h
Formato de Entrega: Folhas A4 - Escritas a Caneta

1. Para cada uma das funções de Transferência abaixo, desenhe o diagrama de Pólos e Zeros
   (a) $H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$
   (b) $H(s) = \frac{s+1}{s^2-1}$
   (c) $H(s) = \frac{s^3-1}{s^2+s+1}$

2. Supondo que $x(t)$ possua como transformada de Laplace $X(s)$, represente (em função de $X(s)$), a transformada de cada um dos sinais abaixo:
   (a) $x(t-1)$
   (b) $\frac{\partial^3 x(t)}{\partial t^3}$
   (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$

3. Prove que a transformada de Laplace do sinal $x(t) = cos(\omega_0 t)u(t)$ é igual a $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$

4. Para um sistema com Função de Transferência $H(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4}$, encontre a resposta para as seguintes entradas:
   (a) $x(t) = 5 \cdot cos(2t + 30^o)$
   (b) $x(t) = 10 \cdot sen(2t + 45^o)$
   (c) $x(t) = 10 \cdot cos(4t + 40^o)$

5. Para um sistema com Função de Transferência $H(s) = \frac{(10-s)}{s+10}$, encontre a resposta para as seguintes entradas:
   (a) $x(t) = cos(\omega t + \theta)$
   (b) $x(t) = cos(t)$
   (c) $x(t) = sen(2t)$
   (d) $x(t) = cos(10t)$
   (e) $x(t) = cos(100t)$

6. Avalie cada uma das afirmativas abaixo como **POSSÍVEL** ou **IMPOSSÍVEL**, supondo um sistema linear invariante no tempo, **Justificando!!!**
   (a) a saída $y(t) = sen(100\pi t)u(t)$ foi obtida quando aplicada a entrada $x(t) = cos(100\pi t)u(t)$
   (b) a saída $y(t) = sen(100\pi t)u(t)$ foi obtida quando aplicada a entrada $x(t) = cos(50\pi t)u(t)$

(c) a saída $y(t) = sen(100\pi t)u(t)$ foi obtida quando aplicada a entrada $x(t) = sen(100\pi t)u(t)$

7. Plote os diagramas de módulo e de fase (Diagrama de Bode) para os sistemas descritos pelos funções de transferências abaixo:

   (a) $H(s) = \frac{s(s+100)}{(s+2)(s+20)}$

   (b) $H(s) = \frac{(s+10)(s+20)}{s^2(s+100)}$

   (c) $H(s) = \frac{(s+10)(s+200)}{(s+20)^2(s+1000)}$

   (d) $H(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2+4s+16)}$

8. Dados os Diagramas de Bode (figuras de 1 a 3), determine qual a função de transferência que os originou. **Justificando!!!**

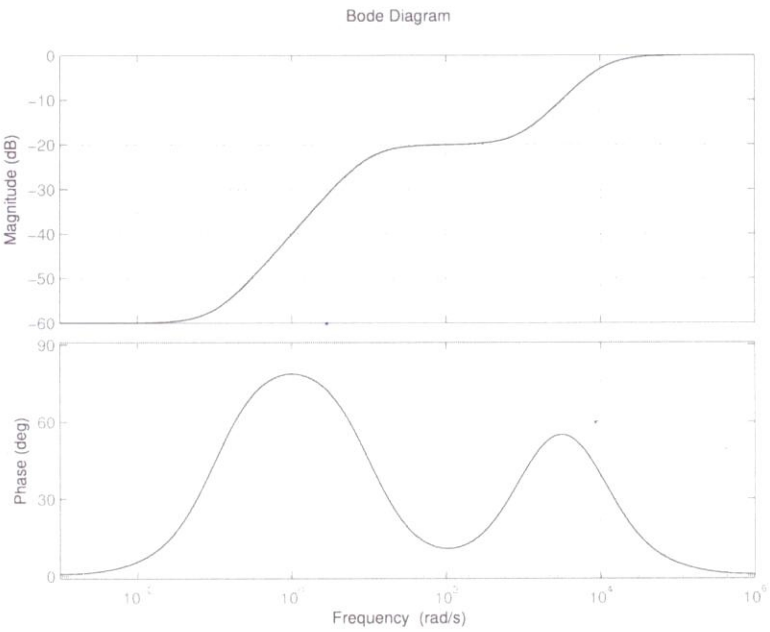
   Funções de transferência possíveis

   (a) $H(s) = \frac{s^2+1}{s^3+s+1000}$

   (b) $H(t) = \frac{(s^2+1000s+100)}{s^3+20s^2+10000s}$

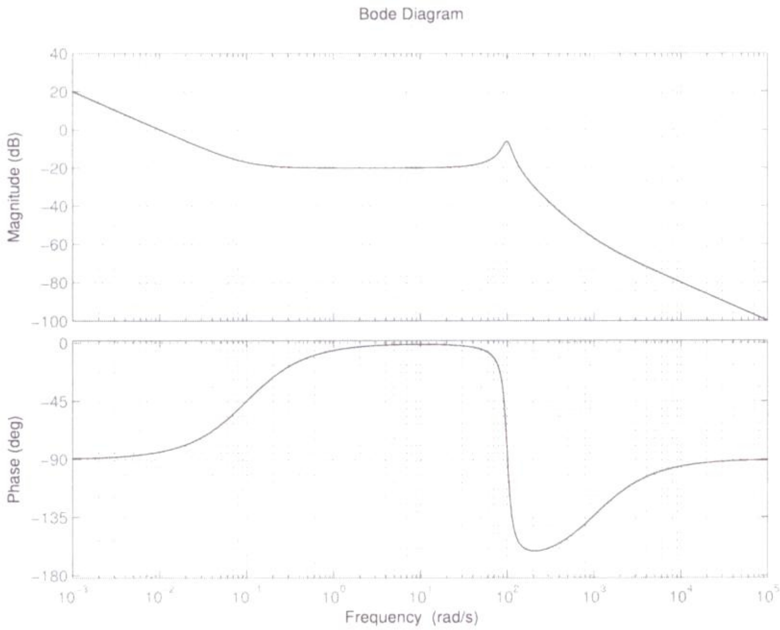
   (c) $H(s) = \frac{s^2+1000s+100}{s^2+10010s+10000}$

   (d) $H(t) = \frac{1}{s^3+160s^2+10000s}$



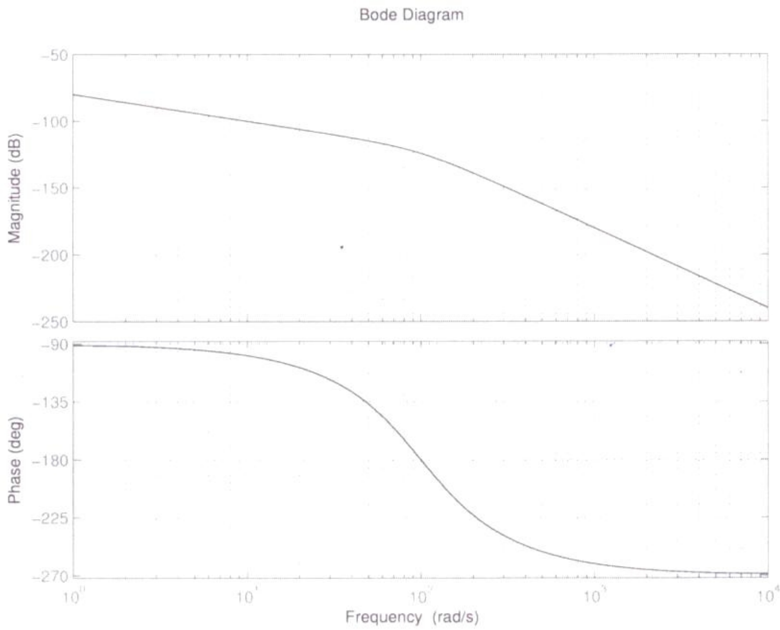
FUNÇÃO (c)

Figura 1: Diagrama de Bode 1



FUNÇÃO (b)

Figura 2: Diagrama de Bode 2



FUNÇÃO (d)

Figura 3: Diagrama de Bode 3

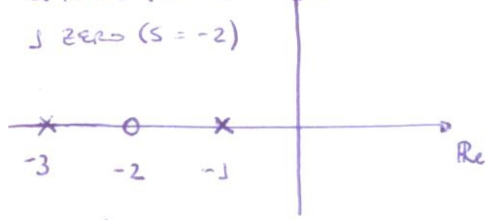
SISTEMAS LINEARES I

LISTA 3 - GABARITO

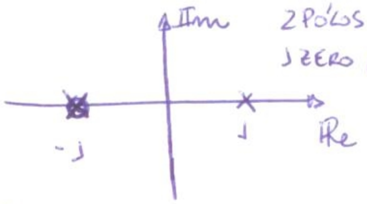
Q1

ⓐ $H(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$

2 PÓLOS ($s=-3, s=-1$)
1 ZERO ($s=-2$)

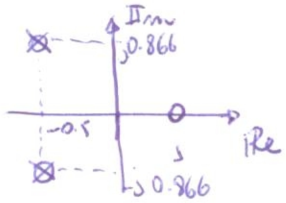


ⓑ $H(s) = \frac{s+1}{s^2-1}$



2 PÓLOS ($s=-1, s=1$)
1 ZERO ($s=-1$)

ⓒ $H(s) = \frac{s^3-1}{s^2+s+1}$



2 PÓLOS ($s=-0.5+j0.866$, $s=-0.5-j0.866$)
3 ZEROS ($s=-0.5+j0.866$, $s=-0.5-j0.866$, $s=1$)

Q2

ⓐ PELA PROPRIEDADE

$$x(t-a)\,u(t-a) = e^{-as}X(s)$$

ⓑ $$\frac{\partial^3 x(t)}{\partial t^3} = s^3X(s) - s^2x(0^-) - s x'(0^-) - x''(0^-)$$

PELA PROPRIEDADE: $\frac{\partial x(t)}{\partial t} = s X(s) - x(0^-)$, $\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = s^2X(s) - s\,x(0^-) - x'(0^-)$

$$\frac{\partial^3 x(t)}{\partial t^3} = s^3X(s) - s^2x(0^-) - s x'(0^-) - x''(0^-)$$

ⓒ PELA PROPRIEDADE: $\int_0^t x(t)\,dt = \frac{1}{s}X(s)$

Obs: EXISTE UM ERRO NA FORMULAÇÃO DA QUESTÃO. O LIMITE DE INTEGRAÇÃO É $[0, t]$

Q3

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t)\,u(t)\cdot e^{-st}\,dt \rightarrow \int_0^{+\infty}\cos(\omega_0 t)\,e^{-st}\,dt = \int_0^{+\infty}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]\cdot e^{-st}\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{j\omega_0 t}\cdot e^{-st}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-j\omega_0 t}\,e^{-st}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{+j\omega_0+s} + \frac{1}{-j\omega_0+s}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+\cancel{j\omega_0}+s-\cancel{j\omega_0}}{(s+j\omega_0)(s-j\omega_0)}\right]$$

$$\left[\frac{s^2}{s^2+\omega_0^2}\right] \rightarrow \boxed{X(s) = \frac{s^2}{s^2+\omega_0^2}}$$

Q4

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+5s+4} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega+2}{4-\omega^2+j\omega 5} = \begin{cases} |H(j\omega)| = \dfrac{\sqrt{4+\omega^2}}{\sqrt{(4-\omega^2)^2+(5\omega)^2}} \\ \angle H(j\omega) = \arctan(\omega/2) - \arctan\left(\dfrac{5\omega}{4-\omega^2}\right) \end{cases}$$

(a) $x(t) = 5\cos(2t+30^\circ)$

$$y(t) = 5 \cdot |H(j\omega)| \cos(2t + 30^\circ + \angle H(j\omega))$$

$$y(t) = 5 \cdot |H(j2)| \cos(2t+30^\circ + \angle H(j2))$$

$$|H(j2)| = \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{(4-2^2)^2+(5\cdot 2)^2}} \qquad \angle H(j2) = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{5\omega}{4-4}\right)$$

$$|H(j2)| = \frac{\cancel{4}^{2}\sqrt{2}}{\cancel{10}\,5} \qquad \angle H(j2) = 45^\circ - 90^\circ$$

$$y(t) = 5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \cos(2t+30^\circ-45^\circ) \Rightarrow y(t) = 2\sqrt{2}\cos(2t-15^\circ)$$

(b) $x(t) = 10\sin(2t+45^\circ)$

$$y(t) = 10 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{5} \cdot \sin(2t+45^\circ-45^\circ) \Rightarrow y(t) = 4\sqrt{2}\sin(2t)$$

(c) $x(t) = 10\cos(4t+40^\circ)$

$$|H(j4)| = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{(4-16)^2+(5\cdot 4)^2}} \qquad \angle H(j4) = \arctan(4/2) - \arctan\left(\frac{5\cdot 4}{4-16}\right)$$

$$|H(j4)| = 0.1917 \cong 0.2 \qquad \angle H(j4) = 122.5^\circ$$

$$y(t) = 10 * 0.2\cos(4t+40^\circ+122.5^\circ)$$

$$y(t) = 2\cos(4t+162.5^\circ)$$

Q5 ③

$H(s) = \dfrac{10 - s}{s + 10}$ 1 PÓLO EM $s = -10$

1 ZERO EM $s = +10$

$H(j\omega) = \dfrac{10 - j\omega}{j\omega + 10} \Rightarrow |H(j\omega)| = \dfrac{\sqrt{100+\omega^2}}{\sqrt{100+\omega^2}} = \boxed{|H(j\omega)| = 1}$ INDEPENDENTE DE ω

$\angle H(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\omega/10\right) - \operatorname{arctg}\left(\omega/10\right)$

(a) $x(t) = \cos(\omega t + \phi)$

$y(t) = \cos(\omega t + \theta + \angle H(j\omega))$

(b) $x(t) = \cos(\omega t) \rightarrow \omega = 1$ rad/s $\rightarrow \angle H(j1) = -11.5°$ ou $348.5°$

$y(t) = \cos(t + 348.5°)$

(c) $x(t) = \operatorname{sen}(2t) \rightarrow \omega = 2$ rad/s $\rightarrow \angle H(j2) = -22.7°$ ou $337.3°$

$y(t) = \operatorname{sen}(t + 337.3°)$

(d) $x(t) = \cos(10t) \rightarrow \omega = 10$ rad/s $\rightarrow \angle H(j10) = -90°$ ou $270°$

$y(t) = \cos(10t + 270°)$

(e) $x(t) = \cos(100t) \rightarrow \omega = 100$ rad/s $\rightarrow \angle H(j100) = -168.5°$ ou $191.4°$

$y(t) = \cos(100t + 191.4°)$

Q6 (4)

UM SISTEMA LINEAR NÃO PODE ALTERAR A FREQUÊNCIA DE UM SINAL POIS P/ QUE ISSO ACONTEÇA, DEVEMOS TER UM PÓLO E UM ZERO SINTONIZADOS NA FREQUENCIA DE DESTINO ~~ORIGEM~~ E NA FREQUENCIA DE ORIGEM, RESPECTIVAMENTE. O QUE TORNA NÃO-LINEAR.

(a) É POSSIVEL POIS OCORRE APENAS UMA ALTERAÇÃO DE FASE

(b) NÃO É POSSIVEL " " UM ALTERAÇÃO NA FREQUÊNCIA.

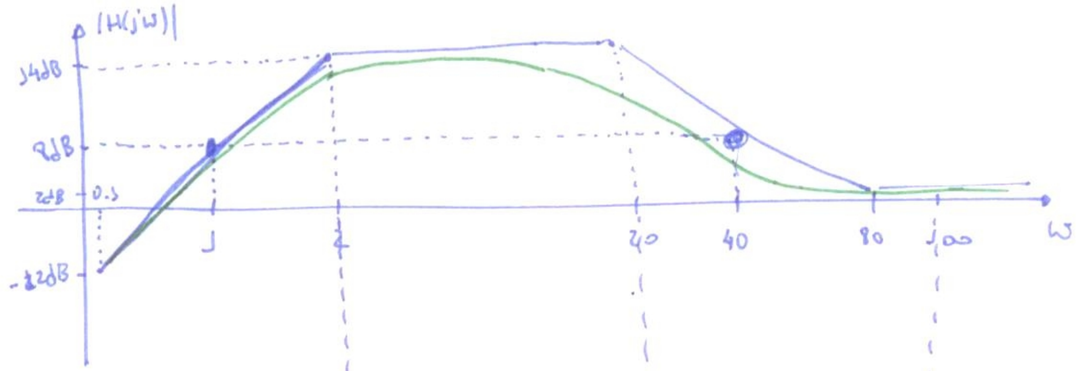
(c) É POSSIVEL " NÃO " ~~ALT~~ ALTERAÇÃO NO SINAL.

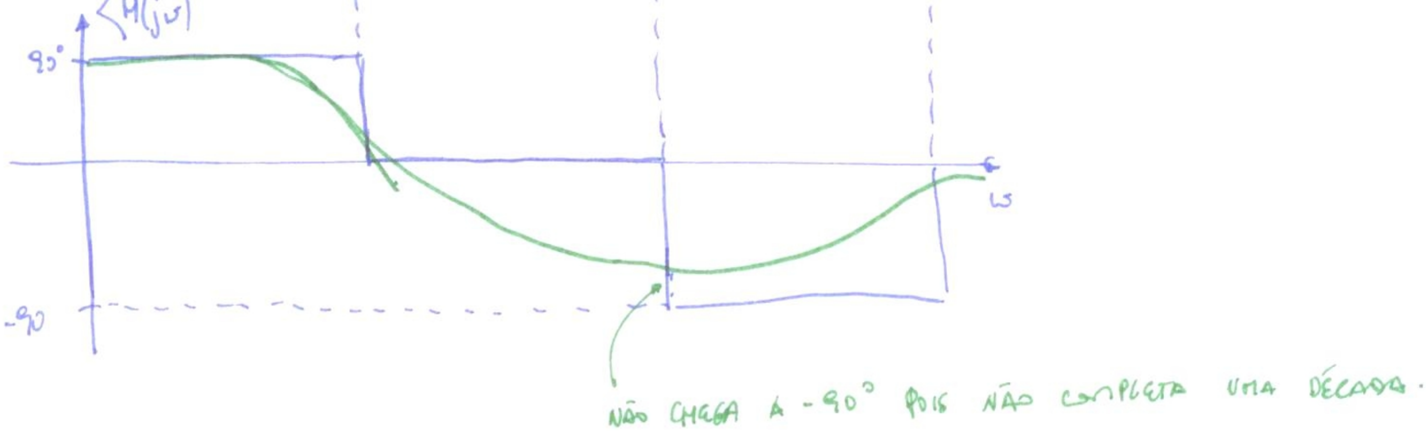
Q7

(a) $H(s) = \dfrac{s(s+100)}{(s+2)(s+20)} \Rightarrow H(s) = \dfrac{100}{40} \cdot \dfrac{s(1+s/100)}{(1+s/2)(1+s/20)}$

$k = 20\log(10/4)$

P/ FREQUENCIA $j\omega = 1 \rightarrow |H(j\omega)| \cong k \cong 8dB$





Q7

(b) $H(s) = \frac{10 \cdot 200}{100} \frac{(1+s/10)(1+s/200)}{s^2(1+s/100)}$

$K = 20 \log(20) = 26\,dB$

$|H(j10)| = -40 + 6 + 26 \simeq -8\,dB$