Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2015/2
Prova 1
Data: 11/12/2015
Total de Pontos: 110 Pontos - 100 das Questões + 10 Bônus

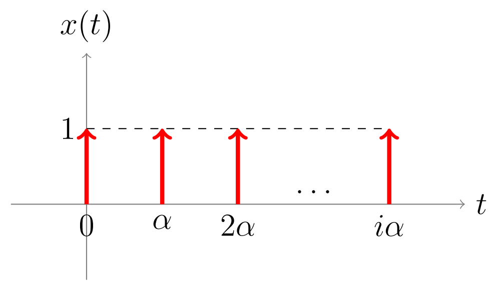
Questão 1 (30 pontos)

Supondo um SLIT S_1 com resposta ao impulso $h(t)$ (com transformada de Laplace $H(s)$) e entrada $x(t)$ (com transformada de Laplace $X(s)$). A resposta $y(t)$ é dada por $h(t)*x(t)$

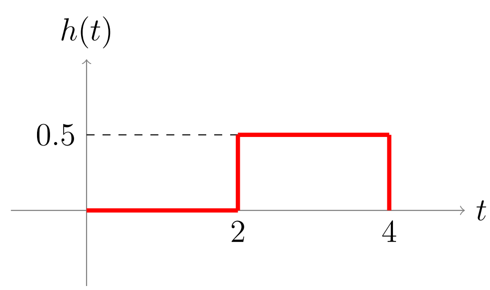
$$H(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-\alpha \cdot i \cdot s} \qquad\qquad X(s) = (0.5 \cdot e^{-2s})\frac{1-e^{-2s}}{s}$$

(a) (10 pontos) Encontre o valor mínimo de α inteiro que evita qualquer sobreposição de sinais na saída $y(t)$.

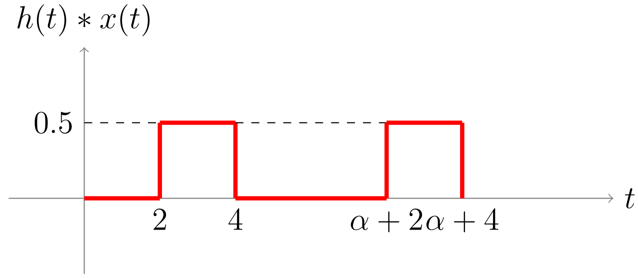
Solução: Fazendo a transformada inversa de Laplace de $H(s)$, encontramos $h(t)$ que é um trem de impulsos atrasados e possui o seguinte formato:



Fazendo a transformada inversa de Laplace de $X(s)$, encontramos $x(t)$ que é um pulso bloco com o seguinte formato:



Fazendo a convolução gráfica entre h(t) e x(t), temos:



Para que ocorra o mínimo de supersição do sinal, $\alpha + 2 = 4 \rightarrow \alpha = 2$, assim temos que o valor de mínimo inteiro $\alpha = 3$ para que não ocorra supersição.

(b) (10 pontos) Encontre a Energia do Sinal $x(t)$

Solução: A energia do sinal pode ser definida como

$$E_{x(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \partial t$$

Para o sinal em questão, temos:

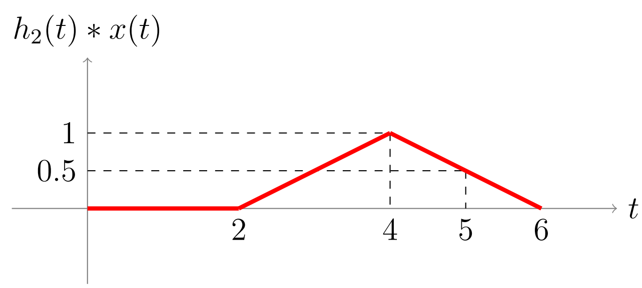
$$E_{x(t)} = \int_{2}^{4} (0.5)^2 \partial t = (0.5)^2 \int_{2}^{4} \partial t = 0.025 * (4 - 2) = 0.05 \; u.a.e.$$

(c) (10 pontos) Supondo que a resposta ao impulso do sistema S_2 seja $H_2(s) = \frac{2-2e^{-2s}}{s}$, encontre o valor de $y_2(4)$ e $y_2(5)$ para $y_2(t) = h_2(t) * x(t)$

Solução: A integral de convolução é definida por:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h_2(t - \tau) \partial \tau$$

Fazendo a convolução gráfica, encontramos:



Questão 2 (40 pontos)

Para o circuito da figura, faça:

(a) (10 pontos) Encontre a modelagem do circuito no domínio do tempo e no domínio das frequências imaginárias supondo que os componentes do circuito são modelos lineares de componentes reais(para isso, coloque todos termos dependentes de $v_{in}(t)$ (e variantes) de um lado da equação e todos os termos de $v_{out}(t)$ (e variantes) do outro lado)

Solução: Fazendo LKC no nó, temos:

$$\frac{v_{in}(t) - v_{out}(t)}{R_1} = \frac{v_{out}(t)}{R_2} + C\frac{\partial v_{out}(t)}{\partial t} + \frac{1}{L}\int_{0^+}^{+\infty} v_{out}(t)\partial t$$

Reescrevendo a equação, temos:

$$\frac{v_{in}(t)}{R_1} = \frac{v_{out}(t)}{R_1} + \frac{v_{out}(t)}{R_2} + C\frac{\partial v_{out}(t)}{\partial t} + \frac{1}{L}\int_{0^+}^{+\infty} v_{out}(t)\partial t$$

Colocando $v_{in}(t)$ isolado, temos:

$$v_{in}(t) = v_{out}(t) + \frac{R_1}{R_2}v_{out}(t) + CR_1\frac{\partial v_{out}(t)}{\partial t} + \frac{R_1}{L}\int_{0^+}^{+\infty} v_{out}(t)\partial t$$

Fazendo a transformada de Laplace:

$$V_{in}(s) = V_{out}(s)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + sCR_1V_{out}(s) - CR_1v_{out}(0^-) + \frac{R_1}{L}\frac{V_{out}(s)}{s}$$

Reescrevendo a equação:

$$sV_{in}(s) + sCR_1v_{out}(0^-) = sV_{out}(s)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + s^2CR_1V_{out}(s) + \frac{R_1}{L}V_{out}(s)$$

Reorganizando a equação:

$$sV_{in}(s) + sCR_1v_{out}(0^-) = sV_{out}(s)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + s^2CR_1V_{out}(s) + \frac{R_1}{L}V_{out}(s)$$

(b) (10 pontos) Encontre a resposta à entrada zero para $v_{out}(0^-) = \frac{1}{5}$ e $i_L(0^-) = 0$

Solução: Como os modelos utilizados para a modelagem são lineares, podemos supor que a modelagem é linear, sendo assim podemos calcular separadamente cada uma das componentes da entrada. Resposta a entrada zero: $v_{in}(t) = 0$, sendo assim, a modelagem pode ser reescrita como:

$$sCR_1v_{out}(0^-) = sV_{out}(s)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + s^2CR_1V_{out}(s) + \frac{R_1}{L}V_{out}(s)$$

Reorganizando a equação:

$$V_{out} = \frac{sCR_1v_{out}(0^-)}{[s^2(CR_1) + s\left(1 + R_1/R_2\right) + R_1/L]}$$

Substituindo os valores:

$$V_{out} = \frac{\frac{1}{5}s}{[s^2 + 5s + 6]}$$

Fazendo frações parciais no polinomio:

$$V_{out} = \frac{1}{5}\left[\frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3}\right]$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$v_{out}(t) = \frac{-2}{5}e^{-2t}u(t) + \frac{3}{5}e^{-3t}u(t)$$

(c) (10 pontos) Encontre a resposta ao estado zero para $v_{in}(t) = u(t)$

Solução: A Transformada de Laplace de $v_{in}(t) = u(t)$ é $V_{in}(s) = 1/s$. Supondo o sistema relaxado (devido a resposta ao estado zero), podemos aplicar a transformada de entrada diretamente a equação abaixo:

$$sV_{in}(s) = sV_{out}(s)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + s^2CR_1V_{out}(s) + \frac{R_1}{L}V_{out}(s)$$

A equação acima pode ser reescrita como sendo:

$$V_{out}(t) = \frac{1}{CR_1s^2 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)s + \frac{R_1}{L}}$$

Substituindo valores, obtemos:

$$V_{out}(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

Fazendo frações parciais, a equação é reduzida à:

$$V_{out}(s) = \left[\frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+3}\right]$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$v_{out}(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t)$$

(d) (10 pontos) Encontre a resposta ao estado zero para $v_{in}(t) = t \cdot u(t)$

Solução: A Transformada de Laplace de $v_{in}(t) = tu(t)$ é $V_{in}(s) = 1/s^2$. Supondo o sistema relaxado (devido a resposta ao estado zero), podemos aplicar a transformada de entrada diretamente a equação abaixo:

$$sV_{in}(s) = sV_{out}(s)\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) + s^2 C R_1 V_{out}(s) + \frac{R_1}{L} V_{out}(s)$$

A equação acima pode ser reescrita como sendo:

$$V_{out}(t) = \frac{1}{s\left[CR_1 s^2 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)s + \frac{R_1}{L}\right]}$$

Substituindo valores, obtemos:

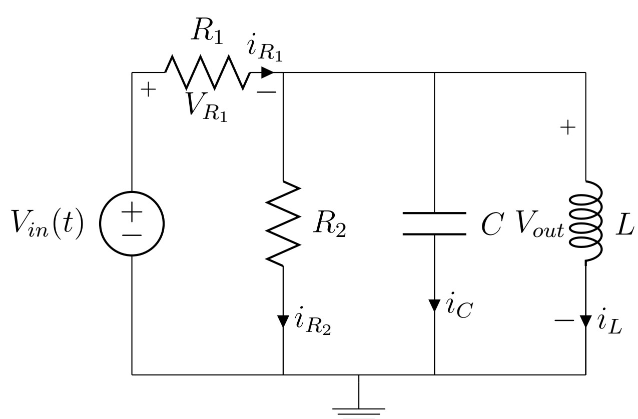
$$V_{out}(s) = \frac{1}{s\left[s^2 + 5s + 6\right]}$$

Fazendo frações parciais, a equação é reduzida à:

$$V_{out}(s) = \left[\frac{1/6}{s} + \frac{-1/2}{s+2} + \frac{1/3}{s+3}\right]$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$v_{out}(t) = \frac{1}{6}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-3t}u(t)$$



$R_1 = 10\Omega$

$R_2 = 2.5\Omega$

$C = 0.1F$

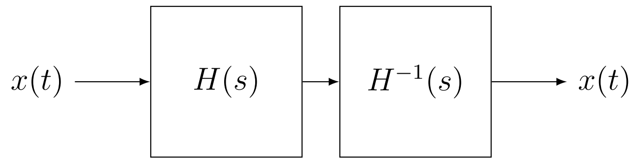
$L = \frac{1}{0.6}H$

Questão 3 (30 pontos)

Um sistema inverso é um sistema que quando colocado em cascata com um sistema qualquer produz como resposta ao impulso unitário, o próprio impulso unitário.

(a) (10 pontos) Supondo um sistema S_3 com resposta ao impulso $h(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-4t}u(t)$, encontre os valores de pólos e zeros do sistema inverso a este e .

Solução: Pela definição de sistemas inversos, podemos inferir que o comportamento de um sistema inverso é:



Assim sendo, podemos aplicar a transformada de Laplace a $h(t)$, obtendo:

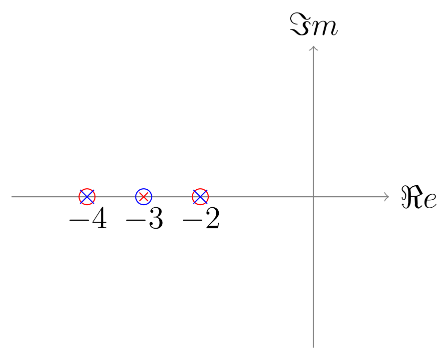
$$H(s) = \frac{1/2}{s+2} + \frac{1/2}{s+4} = \frac{s+3}{(s+2)\,(s+4)}$$

Inspecionando a equação acima, podemos ver que temos 2 pólos($s = -2$ e $s = -4$) e 1 zero ($s = -3$). Para que tenhamos $H(s) * H^{-1}(s) = 1$, temos que ter um cancelamento dos pólos e zeros correspondentes. Ou seja, devemos ter $H^{-1}(s)$ com o formato:

$$H^{-1}(s) = \frac{(s+2)\,(s+4)}{s+3}$$

(b) (5 pontos) Represente o sistema S_3 e seu sistema inverso através de seu mapa de pólos e zeros.

Solução:



(c) (5 pontos) Expresse no domínio das frequências imaginárias a relação entre um sistema e seu sistema inverso

Solução: Pela definição, temos que a convolução entre a resposta ao impulso unitário ($h(t)$) do sistema e o sistema inverso ($h^{-1}(t)$) deve resultar no impulso unitário. Ou seja:

$$\delta(t) = h(t) * h^{-1}(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$1 = H(s) \cdot H^{-1}(s) \rightarrow H^{-1}(s) = \frac{1}{H(s)}$$

(d) (10 pontos) Prove a propriedade da convolução no tempo no domínio das frequências imaginárias.

Solução: Supondo dois sinais causais $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e que:

$$\mathfrak{L}\left[f_1\right] = F_1(s)$$

$$\mathfrak{L}\left[f_2\right] = F_2(s)$$

A definição de integral de convolução é:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\partial\tau$$

Então aplicando a definição da transformada de Laplace, temos:

$$\mathfrak{L}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\partial\tau\right] = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\partial\tau\right)\partial t$$

Invertendo os limites de integração, temos:

$$\mathfrak{L}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\partial\tau\right] = \int_{0}^{+\infty}\left(f_1(t)\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} f_2(t-\tau)\partial t\right)\partial\tau$$

Substituindo, $u = t - \tau$, temos:

$$\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} f_2(t-\tau)\partial t = \int_{0}^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f_2(u)\partial u = e^{-\tau s}\int_{0}^{+\infty} e^{-s(u)} f_2(u)\partial u$$

Voltando a equação anterior:

$$\int_{\tau}^{+\infty} e^{-st} f_2(t-\tau)\partial t = \int_{0}^{+\infty} e^{-s(u+\tau)} f_2(u)\partial u = e^{-\tau s}\int_{0}^{+\infty} e^{-s(u)} f_2(u)\partial u$$

$$\mathfrak{L}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\partial\tau\right] = \int_{0}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-\tau s}F_2(s)\partial\tau = F_2(s)\int_{0}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-\tau s}\partial\tau$$

$$\mathfrak{L}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\partial\tau\right] = F_2(s)\int_{0}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-\tau s}\partial\tau = F_1(s) \cdot F_2(s)(c.q.d.)$$

Questão Bonus 4 (10 pontos)

Qual o nome completo do Marquês de Laplace?

Solução: Pierre-Simon Laplace