Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2015/2
Prova 2
Data: 26/02/2015
Total de Pontos: 110 Pontos - 100 das Questões + 10 Bônus

Questão 1 (30 pontos)

Supondo que um sinal real possua banda passante entre 0 e 10 rad/s e que para filtrar **este sinal** foi desenvolvido um filtro com função de transferência como descrita abaixo.

$$H(s) = \frac{0.01s^3 + 3s^2 + 300s + 10000}{s^3 + 120s^2 + 2100s + 10000}$$

(a) (5 pontos) Encontre o diagrama de pólos e zeros do filtro

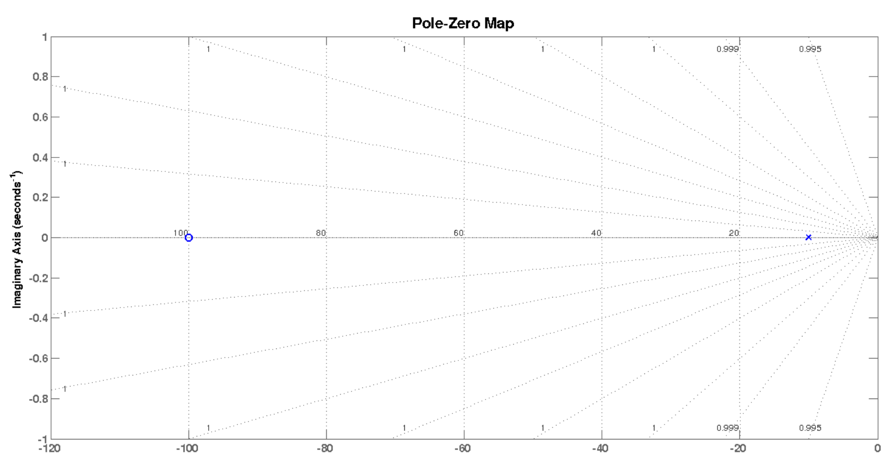
Solução: Podemos que a função de transferência tem o formato:

$$H(s) = \frac{1}{100} \cdot \frac{(s+100)^3}{(s+10)^2 \cdot (s+100)}$$

Sendo assim, podemos fazer o cancelamento do pólo $s = -100$ com o zero de mesmo valor. Obtendo assim:

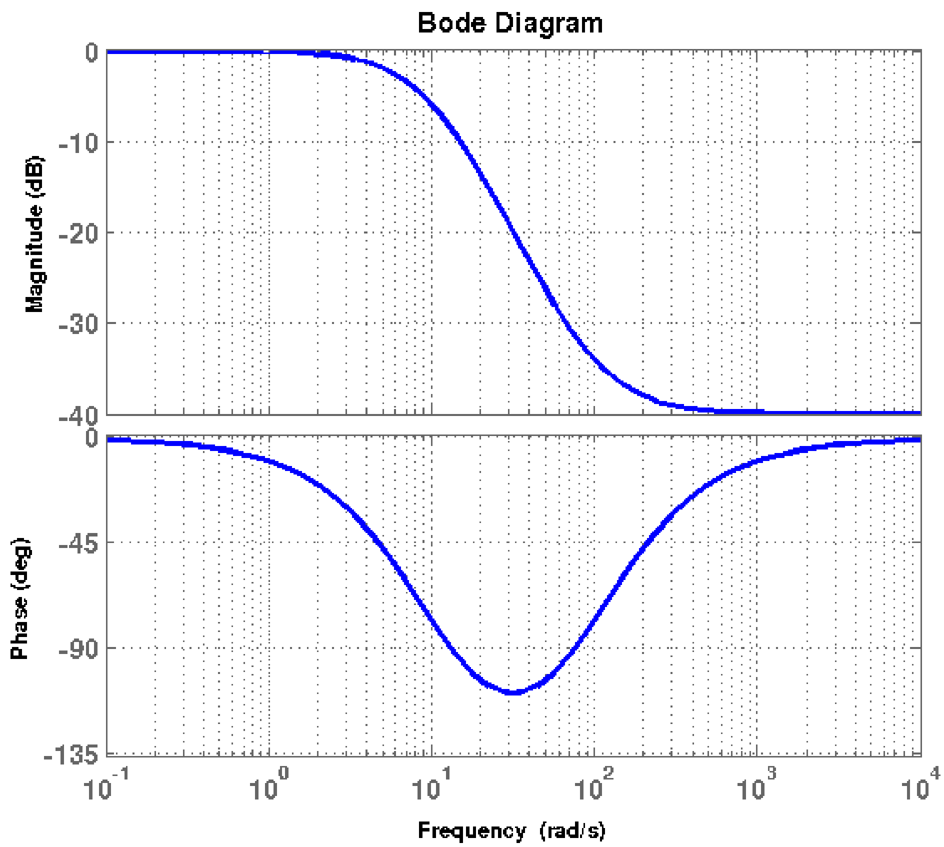
$$H(s) = \frac{1}{100} \cdot \frac{(s+100)^2}{(s+10)^2}$$

Assim, o diagrama de pólos e zeros do filtro se torna (2 pólos simples em s=-10 e dois zeros simples em s=-100):



(b) (10 pontos) Esboce o Diagrama de Bode do filtro (módulo e fase)

Solução:



(c) (5 pontos) Encontre a aproximação da resposta para $cos(10^4 t)$

Solução: Como a resposta em módulo para essa frequência é $-40\ dB$ e a sua resposta em fase é 0^o, temos que a aproximação da resposta para essa cossenóide é:

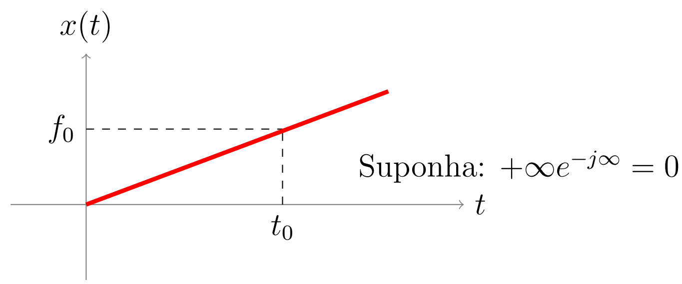
$$H(s) = \frac{1}{100} \cdot cos(10^4 t + 0^o)$$

(d) (10 pontos) Caracterize o filtro como sendo **passa-baixas**,**passa-altas**, **passa-faixas** ou **rejeita-faixas** e avalie o projeto do filtro como sendo **bom** ou **ruim**, **JUSTIFICANDO**.

Solução: Esse filtro é um **passa-baixas** e o projeto do filtro é ruim, pois antes a banda de passagem (onde o diagrama de bode corta o valor $-3dB$) do filtro corta frequências inferiores a 10 rad/s (componente do sinal)

Questão 2 (20 pontos)

Encontre a **Transformada de Fourier** do seguinte sinal:



Solução: O modelo do sinal é um modelo linear do tipo $x(t) = at + b$. Como o sinal passa pela origem, podemos dizer que $b = 0$. Sendo assim, podemos dizer que o modelo do sinal se torna:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{f_0}{t_0}t & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$$

Então, a transformada de Fourier no sentido direto, se torna:

$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{f_0}{t_0} t e^{-j\omega t} \partial t$$

Fazendo a integração por partes, temos:

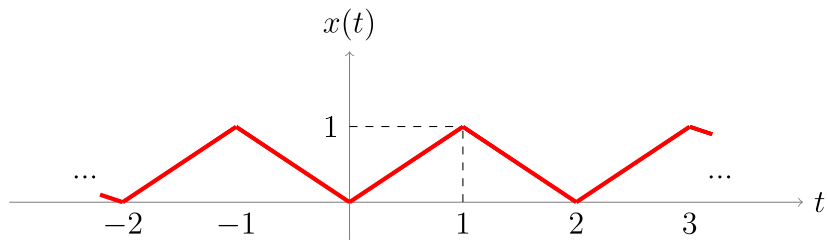
$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} \frac{f_0}{t_0} t e^{-j\omega t} \partial t = \frac{f_0}{t_0}\left[\frac{te^{-j\omega t}}{-j\omega} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\partial t\right]$$

Solucionando a equação acima, temos:

$$X(\omega) = \frac{f_0}{t_0}\frac{1}{-\omega^2} \tag{1}$$

Questão 3 (30 pontos)

Considerando a onda abaixo:



(a) (5 pontos) Encontre o período da onda

Solução: Por inspeção, o período é $T = 2$ *segundos*

(b) (5 pontos) Encontre o valor médio da onda

Solução:
Como a função é periódica, a integral ao longo de um período pode ser obtida em qualquer ponto da função. O termo a_0 pode ser visto como o valor médio do sinal. Assim sendo, o valor médio pode ser obtido por:

$$\overline{x}(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} x(t)\partial t = \frac{1}{2}$$

(c) (10 pontos) Faça a expansão em série de Fourier no formato trigonométrico

Solução: Como o sinal é par, os coeficientes b_n serão zerados pela propriedade da simetria. Os coeficientes a_n poderão ser obtidos por:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-1}^{1} x(t)cos(n\omega t)\partial t = \frac{2}{T}\int_{-1}^{0} -tcos(n\omega t)\partial t + \frac{2}{T}\int_{0}^{+1} tcos(n\omega t)\partial t$$

Como, o valor da integral $\int tcos(n\omega t)\partial t$ é $\frac{t}{n\omega}sen(n\omega t) + \frac{1}{n^2\omega^2}cos(n\omega t)$, encontramos que o coeficiente a_n se torna:

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi^2}\left[cos(n\pi) - 1\right]$$

(d) (10 pontos) Faça a expansão na série de Fourier no formato compacto

Solução: O formato compacto pode ser visto como sendo a combinação dos coeficientes da forma trigonométrica de Fourier. Assim sendo:

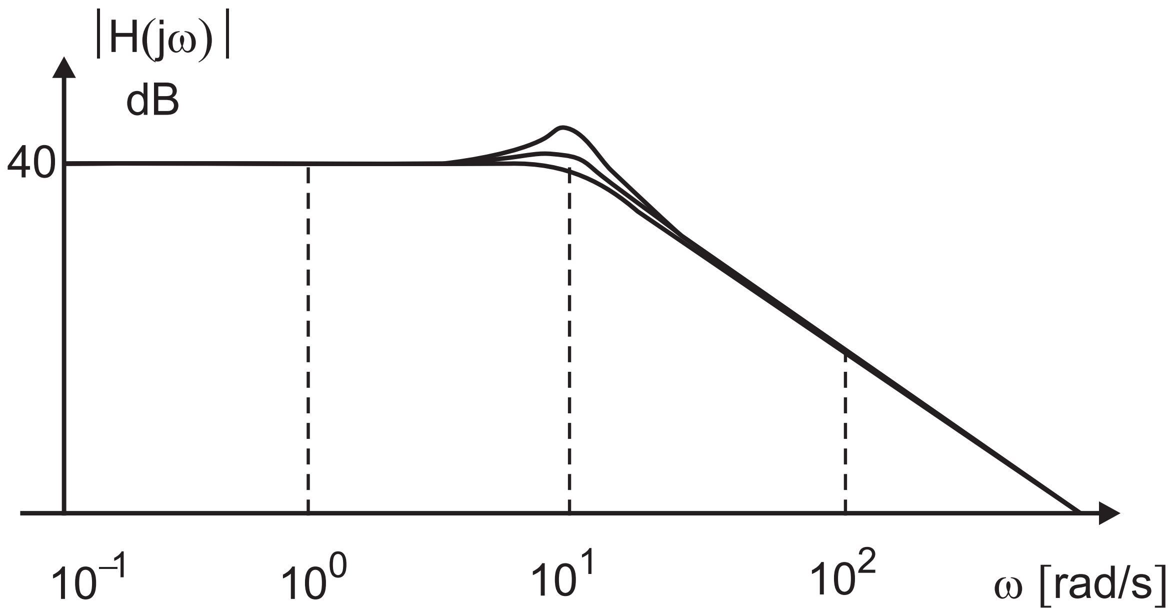
$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n sen(n\omega t + \phi) \tag{2}$$

Onde $C_0 = a_0$, $C_n = \sqrt[2]{a_n^2 + b_n^2}$ e $\phi = arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$

Questão 4 (20 pontos)

A figura abaixo, respresenta os diagrama de bode de uma função de transferência $H(s)$.

(a) (10 pontos) Avalie as afirmações abaixo (afirmando se são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**, **JUSTIFICANDO**)



1. a curva que apresenta o pico máximo tem a menor razão de amortecimento

   Solução: A variável ς corresponde ao fator de amortecimento (ou razão de amortecimento) define a existência ou não de *overshoot*. Quanto menor a razão, maior o *overshoot* (que tem o seu aparecimento para $\varsigma \leq 0,707$ - **VERDADEIRO**

2. a amplitude de 0 dB ocorre na frequência de 100 rad/s, para todas as curvas

   Solução: Como podemos ver, um pólo de segunda foi criado no diagrama. Devido a isso, o coeficiente angular da reta gerada para frequências muito maiores do que frequência de corte do pólo é de 40 dB por década. Sendo assim, 40 dB (iniciais) - 40 dB (uma década depois), temos que em 10^2, obteremos 0 dB - **VERDADEIRO**

3. o sistema, cujo diagrama apresenta o pico máximo, tem os pólos sobre o eixo imaginário

   Solução: Os pólos sobre o eixo imaginário corresponde a um fator amortecimento nulo. Ou seja, teríamos uma descontinuidade no sistema para a frequência de corte em questão. O que não ocorre - **FALSO**

4. a Função de Transferência obedece ao seguinte limite: $\lim_{s\to 0} H(s) = 40\ dB$

   Solução: A afirmativa não se torna verdadeira pois o teorema do valorfinal não se aplica a resposta em frequência. - **FALSO**

(b) (10 pontos) Prove que: se $x_1(t) \rightarrow X_1(\omega)$ e $x_2(t) \rightarrow X_2(\omega)$, então:

$$x_1(t) * x_2(t) \rightarrow X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Solução: Usando a definição de convolução, temos que:

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) \partial\tau$$

Aplicando a Transformada de Fourier:

$$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) \partial\tau \ e^{-j\omega t} \partial t$$

Podemos reescrever a equação acima como:

$$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t-\tau) \ e^{-j\omega t} \partial t \partial\tau$$

Pela propriedade do atraso no tempo, encontramos:

$$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) X_2(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} \partial\tau = X_1(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) = X_1(\omega) X_2(\omega)$$

Questão Bonus 5 (10 pontos)

Qual o comportamento erro da aproximação do diagrama de bode para um pólo de segunda ordem com frequência natural de ω_0?

Solução: O erro apresenta um espalhamento de valores em relação a um eixo virtual posicionado em ω_0