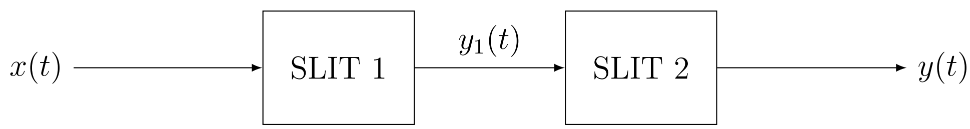
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2016/1
Prova 1
Data: 13/05/2016
Total de Pontos: 110 Pontos - 100 das Questões + 10 Bônus

Questão 1 (20 pontos)

De um conjunto de sistemas interligados (como mostrado na figura abaixo), foi extraído o sinal de saída $y(t) = u(t-1) - u(t-5)$. Sabendo-se que o SLIT 1 possui função de transferência $H(s) = s$ e que o SLIT 2 possui resposta ao impulso $h(t) = u(t) - u(t-1)$, encontre:



(a) (5 pontos) Esboce o sinal $y_1(t)$, para que $y(t)$ seja como descrito acima.

Solução: Supondo que SLIT1 tenha resposta ao impulso unitário $h_1(t)$ e SLIT 2 tenha resposta ao impulso unitário $h_2(t)$. Podemos decompor o sinal $y(t)$ da seguinte maneira:

$$y(t) = h_1(t) * h_2(t) * x(t)$$

Como sabemos que $y(t)$ é

$$y(t) = h_2(t-1) + h_2(t-2) + h_2(t-3) + h_2(t-4)$$

E vemos que:

$$y(t) = \underbrace{[\delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3) + \delta(t-4)]}_{h_1(t)*x(t)} * h_2(t)$$

Ou seja:

$$y_1(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3) + \delta(t-4)$$

(b) (10 pontos) Equacione e esboce o sinal de entrada $x(t)$

Solução: Sabemos que $H_1(s) = s$ significa que se a entrada do sistema for $x(t)$ então a saída $\frac{\partial x(t)}{\partial t}$. Então, cada um dos impulsos de $h_1(t) * x(t)$ foi criado por um degrau unitário deslocado. Ou seja

$$x(t) = u(t-1) + u(t-2) + u(t-3) + u(t-4)$$

(c) (5 pontos) Calcule a energia do sinal de entrada $x(t)$ (usando como referência os limites dados pela saída $y(t)$).

Solução: Como o sinal $x(t)$ é o somatório de impulsos, a energia deste sinal pode ser vista como:

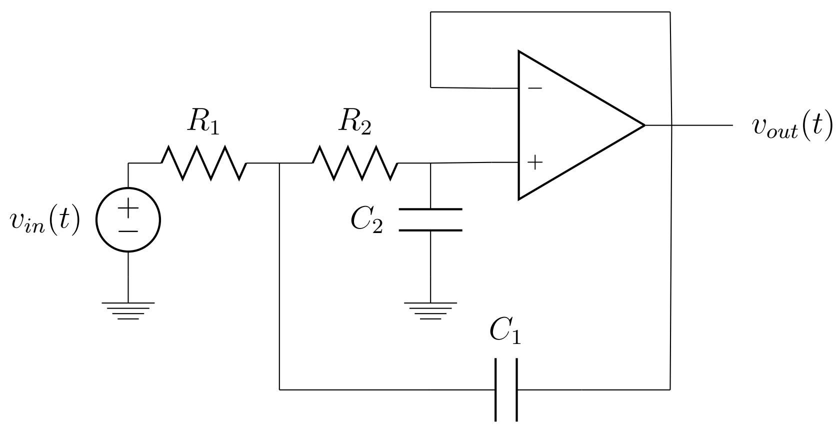
$$E_{x(t)} = \int_1^5 x^2(t)\partial t = \int_1^2 1^2\partial t + \int_2^3 2^2\partial t + \int_3^4 3^2\partial t + \int_4^5 4^2\partial t$$

Ou seja:

$$E_{x(t)} = (2-1) + 4(3-2) + 9(4-3) + 16(5-4) = 30u.a.e.$$

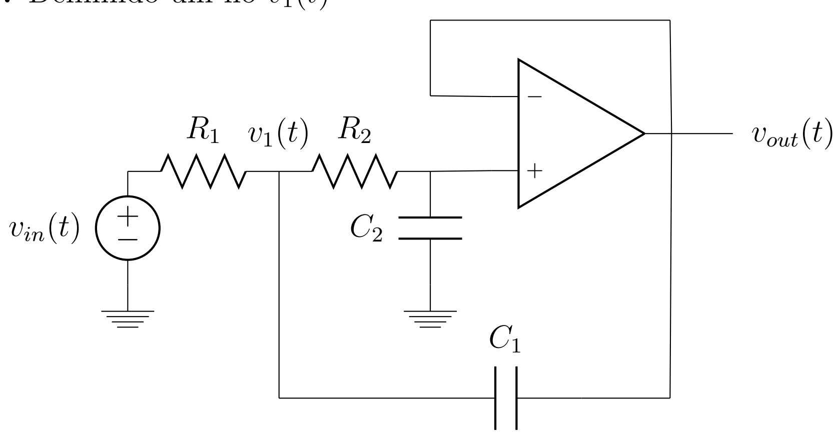
Questão 2 (40 pontos)

O circuito abaixo é conhecido por ser um filtro de Sallen e Key.



(a) (10 pontos) Modele o circuito acima, tendo como entrada $v_{in}(t)$ e como saída $v_{out}(t)$

Solução: Definindo um nó $v_1(t)$



Aplicando a Lei das Correntes no nó central, temos:

$$\frac{v_{in}(t) - v_1(t)}{R_1} + \frac{v_{out}(t) - v_1(t)}{R_2} + C_1\frac{\partial(v_{out}(t) - v_1(t))}{\partial t} = 0$$

Podemos encontrar uma relação direta entre $v_1(t)$ e $v_{out}(t)$ por:

$$v_{out}(t) = \frac{1}{C_2}\int i_{C_2}(t)\partial t$$

$$i_{C_2}(t) = \frac{v_{out}(t) - v_1(t)}{R_2}$$

Ou seja:

$$v_{out}(t) = \frac{1}{C_2R_2}\int v_{out}(t) - v_1(t)\partial t = \frac{1}{C_2R_2}\left[\int v_{out}(t)\partial t - \int v_1(t)\partial t\right]$$

(b) (10 pontos) Encontre a Função de Transferência do circuito

Solução: Aplicando-se a Transformada de Laplace, temos:

$$H(s) = \frac{1}{C_1C_2R_1R_2s^2 + sC_2(R_1 + R_2) + 1}$$

(c) (5 pontos) Para $v_{in}(t) = u(t)$ e $C_1C_2R_1R_2 = \frac{1}{6}$ e $C_2(R_1 + R_2) = \frac{5}{6}$, encontre a resposta ao estado zero

Solução: Como $V_{in}(s) = \frac{1}{s}$, temos:

$$Y(s) = \frac{6}{s^3 + 5s^2 + 6s} = \frac{6}{s(s+2)(s+3)} \to y(t) = u(t) - 3e^{-2t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

(d) (10 pontos) Para $v_{in}(t) = \delta(t)$ e $C_1C_2R_1R_2 = \frac{1}{4}$ e $C_2(R_1 + R_2) = 1$, encontre a resposta ao estado zero

Solução: Como $V_{in}(s) = 1$, temos:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} = \frac{4}{(s+2)^2} \to y(t) = 4te^{-2t}u(t) + 4e^{-2t}u(t)$$

(e) (5 pontos) Equacione a energia armazenada no capacitor C_2 ao longo do tempo (dica: não substitua valores)

Solução: Como $E_C(t) = \frac{CV_C^2(t)}{2}$, temos:

$$E_C(t) = \frac{C_2 V_{out}^2(t)}{2}$$

Questão 3 (40 pontos)

(a) (15 pontos) Supondo $h(t) = e^{j\omega_0 t}$ como sendo a resposta ao impulso unitário de um sistema linear e $x(t) = u(t+0.5) - u(t-0.5)$ como sendo a sua entrada. Determine o valor de ω_0, que garante que $y(0) = 0$, onde $y(0)$ é a resposta ao estado zero do sistema linear no instante 0.

Solução: Para encontrarmos a resposta ao estado zero, devemos fazer a **convolução** da entrada com a resposta ao impulso unitário, assim temos:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\partial\tau = \int_{-0.5}^{0.5} h(t-\tau)\partial\tau = \int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega_0(t-\tau)}\partial\tau$$

Como a integral tem como variável de integração τ, podemos fazer:

$$y(t) = \int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega_0(t-\tau)}\partial\tau = e^{j\omega_0 t}\int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega_0\tau}\partial\tau$$

Para determinar $y(0)$ devemos fazer:

$$y(0) = e^{j\omega_0 0}\int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega_0\tau}\partial\tau = \int_{-0.5}^{0.5} e^{j\omega_0\tau}\partial\tau = \frac{e^{j\omega_0\tau}}{j\omega_0\tau}\bigg|_{\tau=-0.5}^{0.5}$$

Fazendo Euller, vemos que:

$$y(0) = \frac{2sen(\frac{\omega_0}{2})}{\omega_0}$$

Para que $y(0) = 0$, $\omega_0 = 2k\pi$ para $k = 0, 1, 2, \cdots$

(b) (15 pontos) Um sistema linear é expresso por $\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 4y(t) = x(t)$, qual a resposta completa deste sistema para $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$ dado $y(0) = 1$ (**Sem Utilizar a Transformada de Laplace**).

Solução: Primeiramente, vamos a Resposta à Entrada Zero:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 4y(t) = 0$$

Supondo $y(t) = c_1 e^{\lambda t}$ e $\frac{\partial y(t)}{\partial t} = c_1\lambda e^{\lambda t}$, temos:

$$c_1(\lambda + 4)e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \lambda = -4$$

$$y(0) = c_1 e^{\lambda 0} = c_1 = 1$$

Vamos para a Resposta ao Estado Zero:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 4y(t) = e^{(-1+3j)t}$$

Suporemos que a resposta ao estado zero segue o mesmo comportamento da entrada com uma modificação da amplitude. De modo que teremos: $y(t) = ke^{(-1+3j)t}$, então:

$$(-1+3j)ke^{(-1+3j)t} + 4ke^{(-1+3j)t} = e^{(-1+3j)t} \rightarrow (-1+3j)k + 4k = 1$$

Assim, vemos que $k = \frac{1}{3+3j}$ ou $k = \frac{1-j}{6}$. Ambas as respostas se iniciam como t=0. Então, podemos escrever a resposta completa como:

$$y(t) = e^{-4t}u(t) + \frac{1-j}{6}e^{-1+3j}u(t)$$

(c) (10 pontos) Prove a transformada de Laplace $x(t) = e^{-at}cos(\omega t)u(t)$

Solução:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}cos(\omega t)u(t)\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Podemos iniciar a prova, provando: $\mathcal{L}\left[cos(\omega t)u(t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ e depois aplicando a propriedade do deslocamento na frequência. Assim sendo:

$$\mathcal{L}\left[cos(\omega t)u(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} cos(\omega t)u(t)e^{-st}\partial t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}e^{-st}u(t)\partial t$$

Como o $u(t)$ limita os limites de integração, podemos reescrever a integral como:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}e^{-st}\partial t = \frac{1}{2}\left[\int_{0}^{+\infty} e^{-(j\omega+s)t}\partial t + \int_{0}^{+\infty} e^{-(s-j\omega)t}\partial t\right]$$

Resolvendo as integrais:

$$\frac{1}{2}\left[\left.\frac{e^{-(s+j\omega)t}}{-(s+j\omega)}\right|_{t=0}^{+\infty} + \left.\frac{e^{-(s-j\omega)t}}{-(s-j\omega)}\right|_{t=0}^{+\infty}\right]$$

Como temos a transformada unilateral de Laplace, podemos supor que os sinais encontram-se na sua ROC (região de convergência para a transformada de Laplace), ou seja:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+j\omega} + \frac{1}{s-j\omega}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+j\omega+s-j\omega}{s^2+(j\omega s)-(j\omega s)-(j\omega)^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right]$$

Como queríamos demonstrar:

$$\mathcal{L}\left[cos(\omega t)u(t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Pela propriedade de atraso em frequências, temos que se $x(t) \rightarrow X(s)$, então

$$x(t)e^{at} \rightarrow X(s-a)$$

Ou seja, para o cosseno, teremos que a transformação atrasada em frequências se tornará:

$$\mathcal{L}\left[e^{-at}cos(\omega t)u(t)\right] = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Como queríamos demonstrar

Questão Bonus 4 (10 pontos)

Escreva a definição de **Sinal** presente nos slides da disciplina

Solução: Um **sinal** é uma função de uma ou mais variáveis, a qual veicula informação sobre a natureza de um fenômeno físico