Universidade Federal do Rio de Janeiro
Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação
EEL350 - Sistemas Lineares I
2016/1
Lista 4
Data de Expedição: 15/11/2016
Limite de Tempo: 1 Semana - Data de Entrega: 22/11/2016

Série de Fourier

Questão 1 ()

Para o sinal periódico contínuo descrito na equação 1, determine:

$$x(t) = 2 + cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right) \tag{1}$$

(a) A frequencia fundamental ω_0 do sinal $x(t)$

(b) Os coeficientes a_n da Série de Fourier no formato da equação 2

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2}$$

(c) Esboce o sinal decomposto acima com 1, 3, 10, 100 termos com uma ferramenta de simulação a sua escolha e anexe UMA figura com todos os plots e o código a estrega da lista

Questão 2 ()

Considere um SLIT com resposta em frequência dada pela equação 3, se a sua entrada é descrita pela equação 4 com período $T = 8$, determine a saída $y(t)$ do sistema.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{j\omega t}dt = \frac{sin(4\omega)}{\omega} \tag{3}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ -1, & 4 \leq t < 8 \end{cases} \tag{4}$$

Questão 3 ()

Determine:

(a) A representação na forma exponencial da Série de Fourier do sinal da equação 5 com período T = 2, além disso, esboce o sinal expandido para 1, 3, 10 e 100 termos (anexe o código fonte e UMA figura com todos os plots)

$$x(t) = e^{-t}, \quad para - 1 < t < 1 \tag{5}$$

(b) A representação na forma trigonométrica da Série de Fourier do sinal da equação 6 com período T = 4, além disso, esboce o sinal expandido para 1, 3, 10 e 100 termos (anexe o código fonte e UMA figura com todos os plots)

$$x(t) = \begin{cases} sin(\pi t), & 0 \leq t \leq 2 \\ 0, \ 2 < t \leq 4 \end{cases} \tag{6}$$

Questão 4 ()

Considere um SLIT causal em que a entrada $x(t)$ se relacione com a saída $y(t)$ através da equação diferencial 7. Encontre a representação da saída $y(t)$ a cada uma das entradas abaixo:

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 4y(t) = x(t) \tag{7}$$

(a) $x(t) = cos(2\pi t)$

(b) $x(t) = cos(4\pi t) + cos(6\pi t + \pi/4)$

Questão 5 ()

Considere um sinal periódico $x_1(t)$ com frequência fundamental ω_1 e coeficientes da série de Fourier exponencial D_n^1. Se um sinal sintético $x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$ for analisado, determine:

(a) A frequência fundamental ω_2 de $x_2(t)$ em função de ω_1

(b) Os coeficientes D_n^2 da série de Fourier exponencial de $x_2(t)$ em função de D_n^1.

Questão 6 ()

Considere os três sinais periódicos descritos abaixo:

$$x_1(t) = \sum_{n=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{jn\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_2(t) = \sum_{n=-100}^{100} cos(n\pi) e^{jn\frac{2\pi}{50}t}$$

$$x_3(t) = \sum_{n=-100}^{100} j \ sin(n\pi) e^{jn\frac{2\pi}{50}t}$$

(a) Quais dos sinais podem ser classificados como sinais reais?

(b) Quais dos sinais podem ser classificados como sinais pares?

Transformada de Fourier

Questão 7 ()

Um sinal $x(t)$ possui $X(\omega)$ como transformada de Fourier. Represente as transformadas de Fourier dos Sinais abaixo em função de $X(\omega)$.

(a) $x_1(t) = x(1-t) + x(-1-t)$

(b) $x_2(t) = x(3t-6)$

(c) $x_3(t) = \frac{\partial^2 x(t-1)}{\partial t^2}$

Questão 8 ()

Dado que $x(t)$ possui transformada de Fourier igual a $X(\omega)$, $h(t)$ possui transformada de Fourier igual a $H(\omega)$, que $y(t) = x(t) * h(t)$ e que $g(t) = x(3t) * h(3t)$. Mostre que $g(t)$ pode ser expresso por $g(t) = A \cdot y(Bt)$

Questão 9 ()

Dado que $x(t)$ possui transformada de Fourier igual a $X(\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5)$ e $h(t) = u(t) - u(t-2)$.

(a) $x(t)$ é periódico?

(b) $x(t) * h(t)$ é periódico?

Questão 10 ()

Dado um SLIT com resposta em frequencia $H(\omega)\frac{1}{j\omega+1}$, para uma entrada específica $x(t)$, foi obtida a resposta $y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$. Determine $x(t)$.

Questão 11 ()

Dado um SLIT com relação de entrada e saída dada pela equação 8, encontre:

$$\frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + 6\frac{\partial y(t)}{\partial t} + 8y(t) = 2x(t) \tag{8}$$

(a) A resposta ao impulso do sistema

(b) A resposta a entrada $x(t) = te^{-2t}u(t)$

Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\}$ Periodic with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t}x(t) = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	3.5.6	$x(t)$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	3.5.6	$x(t)$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} \quad [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Figura 1: Tabela com as Propriedades da Série de Fourier(Extraída do Livro Oppenheim 2^a Edição)

TABLE 4.1 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Section	Property	Aperiodic signal	Fourier transform
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Time Shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Time Reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Time and Frequency Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplication	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta$
4.3.4	Differentiation in Time	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Differentiation in Frequency	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Symmetry for Real and Even Signals	$x(t)$ real and even	$X(j\omega)$ real and even
4.3.3	Symmetry for Real and Odd Signals	$x(t)$ real and odd	$X(j\omega)$ purely imaginary and odd
4.3.3	Even-Odd Decomposition for Real Signals	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$

4.3.7 Parseval's Relation for Aperiodic Signals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Figura 2: Tabela com as Propriedades da Transformada de Fourier(Extraída do Livro Oppenheim 2^a Edição)

TABLE 4.2 BASIC FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, otherwise
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, otherwise
$\sin \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, otherwise
$x(t) = 1$	$2\pi\,\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \; k \neq 0$ (this is the Fourier series representation for any choice of $T > 0$)
Periodic square wave $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ and $x(t + T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ for all k
$x(t) \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin \omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$, $\mathcal{R}e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Figura 3: Tabela com os pares da Transformada de Fourier(Extraída do Livro Oppenheim 2^a Edição)